Statistische Auswertung von Daten
Teil 7: Schätz- und Testverfahren bei zweiparametriger Weibull-Verteilung

DIN 55303-7

ICS 03.120.30

Deskriptoren: Qualitätsmanagement, statistische Auswertung, Schätzung, Weibullverteilung, Stichprobe

Statistical interpretation of data –
Part 7: Estimating and test procedures for Weibull distributions with two parameters

Interprétation statistique de données –
Partie 7: Méthodes de test et d'estimation pour lois de Weibull à 2 paramètres

Inhalt

Vorwort

Diese Norm wurde vom Normenausschuß Qualitätsmanagement, Statistik und Zertifizierungsgrundlagen (NQSZ), Arbeitsausschuß 2 "Angewandte Statistik" erarbeitet.

Zu den Normen der Reihe DIN 55303 gehören weiter DIN 55303-2 : 1984-05, Beiblatt 1 zu DIN 55303-2 : 1984-05 und DIN 55303-5 : 1987-02. E DIN 55303-6 : 1989-04 wurde durch E DIN ISO 11453 : 1992-08 ersetzt.

Anhang A und Anhang B sind informativ.

Fortsetzung Seite 2 bis 23

Normenausschuß Qualitätsmanagement, Statistik und Zertifizierungsgrundlagen (NQSZ)
im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.
Normenausschuß Materialprüfung (NMP) im DIN

1 Anwendungsbereich und Zweck

1.1 Allgemeines

Diese Norm legt Schätzverfahren bei der zweiparametrigen Weibull-Verteilung anhand von Stichprobenergebnissen fest.

ANMERKUNG: Die dreiparametrige Weibull-Verteilung unterscheidet sich von der zweiparametrigen durch den Verschiebungsparameter x_0 (siehe Abschnitt 4), welcher eine Verschiebung der Verteilung auf der Merkmalsachse bewirkt.

Geschätzt werden die Parameter der Verteilung sowie der Unterschreitungsanteil bei betrachtetem Merkmalswert und der Wert des Quantils bei betrachtetem Unterschreitungsanteil. Es werden die Berechnungen von Punktschätzungen und von Vertrauensbereichen sowie eine Prüfung der Ergebnisse im Weibull-Netz im Hinblick auf die Voraussetzung "zweiparametrige Weibull-Verteilung" behandelt.

Diese Norm ist fachübergreifend. Sie gilt für alle Bereiche wie z. B. Technik, Wirtschaft, Medizin, Wissenschaft und andere.

1.2 Vollständige und zensorisierte Stichproben

Als Grundlage für eine Schätzung wird eine Stichprobe von mehreren Einheiten herangezogen. Die aus den Einheiten gewonnenen Ermittlungsergebnisse stellen eine Stichprobe aus der Grundgesamtheit aller möglichen Ermittlungsergebnisse dar. Diese Stichprobe wird als "vollständige Stichprobe" bezeichnet, wenn Ermittlungsergebnisse von allen Stichprobeneinheiten vorliegen. Sie wird als "zensorisierte Stichprobe" bezeichnet, wenn nur von einem Teil der Stichprobeneinheiten Ermittlungsergebnisse vorliegen. Von den verschiedenen möglichen Arten der Zensorisierung werden hier die beiden folgenden betrachtet:

- Vorab festgelegte Anzahl $r < n$ der n Stichprobeneinheiten, von denen Merkmalswerte ermittelt werden sollen. Die Merkmalswerte, die an den n Stichprobeneinheiten ermittelt werden, fallen nach aufsteigenden Werten an, bis die vorab festgelegte Anzahl r erreicht ist; die weiteren $(n-r)$ Merkmalswerte, die bei Fortsetzung der Untersuchung gefunden würden, werden nicht mehr ermittelt.

- Vorab festgelegter größter Merkmalswert x', wie z. B. eine Festigkeit, eine Zeitdauer oder eine Anzahl von Schaltzyklen. Die Stichprobe des Umfangs n wird bis zum Erreichen des größten Merkmalswertes x' beansprucht. Dann liegen Merkmalswerte $x \leq x'$ von r' Stichprobeneinheiten vor; die weiteren $(n-r')$ Merkmalswerte, die bei Fortsetzung der Untersuchung gefunden würden, werden nicht mehr ermittelt.

Diese Norm gilt streng nur für die vorab festgelegte Anzahl r. Sie gilt in ausreichender Näherung auch für den vorab festgelegten größten Merkmalswert x'. Im letzteren Fall ist in den nachfolgenden Formeln r durch r' zu ersetzen.

Zur Bedeutung des Wortes "zensorisieren" sei darauf hingewiesen, daß es den Verzicht auf einen direkt oder indirekt festgelegten Anteil derjenigen Werte einer Stichprobe bedeutet, die bei vollständiger Untersuchung der Stichprobe ermittelt werden könnten. Dagegen bezeichnet das Wort "stutzen" den Verzicht auf einen Teil der Werte der Grundgesamtheit. In dieser Norm wird vorausgesetzt, daß die Grundgesamtheit nicht gestutzt ist.

ANMERKUNG: In dieser Norm werden nur vollständige und einfach zensorisierte Stichproben behandelt, nicht jedoch mehrfach zensorisierte Stichproben.

1.3 Wichtige Randbedingungen

Obwohl Mischverteilungen bei speziellen Merkmalen, beispielsweise bei Lebensdauern, vergleichsweise häufig vorkommen können, geht diese Norm von der Voraussetzung aus, daß die Stichprobenergebnisse einer unvermischten Weibull-Verteilung entstammen. Deshalb ist es wichtig, daß sich der Anwender vor der Anwendung der in dieser Norm beschriebenen Verfahren davon überzeugt, daß eine unvermischte Weibull-Verteilung vorliegt (siehe Abschnitt 6).

Entsprechende Vorsicht ist – unter Einbeziehung aller verfügbaren Kenntnisse aus dem Fachgebiet, aus welchem die Stichprobe stammt – geboten bei jeglichen Extrapolationen in Bereiche der Häufigkeitssumme hinein, die nicht mit Meßwerten belegt sind; und zwar um so mehr, je weiter sich die beurteilende Betrachtung aus dem mit Meßwerten belegten Bereich entfernt.

Zur statistischen Auswertungsmethodik ist anzumerken, daß es unterschiedliche Näherungen gibt. Je besser die Näherung ist, um so größer ist im allgemeinen der Rechenaufwand. Die Methodik dieser Norm wurde gewählt, weil sie auch nur mit einem Taschenrechner angewendet werden kann. Das vielfach verwendete Näherungsverfahren unter Anwendung der kleinsten Abweichungsquadrate wird hier als nichthinreichende Näherung betrachtet.

2 Normative Verweisungen

Diese Norm enthält durch datierte oder undatierte Verweisungen Festlegungen aus anderen Publikationen. Diese normativen Verweisungen sind an den jeweiligen Stellen im Text zitiert, und die Publikationen sind nachstehend aufgeführt. Bei datierten Verweisungen gehören spätere Änderungen oder Überarbeitungen dieser Publikationen nur zu dieser Norm, falls sie durch Änderung oder Überarbeitung eingearbeitet sind. Bei undatierten Verweisungen gilt die letzte Ausgabe der in Bezug genommenen Publikation.

DIN 55350-14
Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe der Probenahme

DIN 55350-21
Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe der Statistik, Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

DIN 55350-22
Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe der Statistik, Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

DIN 55350-24
Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe der Statistik, Schließende Statistik

Übrige Normen der Reihe DIN 55350
Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik

ISO 3534-1 : 1993
Statistics – Vocabulary and symbols – Part 1: Probability and general statistical terms

ISO 3534-2 : 1993
Statistics – Vocabulary and symbols – Part 2: Statistical quality control

ISO 3534-3 : 1985
Statistics – Vocabulary and symbols – Part 3: Design of experiments

3 Begriffe

In dieser Norm werden die Begriffe aus ISO 3534-1 : 1993, ISO 3534-2 : 1993, ISO 3534-3 : 1985 und der Normenreihe DIN 55350 verwendet, insbesondere diejenigen aus DIN 55350-14, DIN 55350-21, DIN 55350-22 und DIN 55350-24.

4 Formelzeichen und Definitionsgleichungen

X betrachtetes Merkmal

x Wert des Merkmals

x_G Quantil zum Unterschreitungsanteil G

$G(x)$ Verteilungsfunktion von X = Unterschreitungsanteil zum Wert x

$R(x) = 1 - G(x)$

x_0	Verschiebungsparameter der dreiparametrigen Weibull-Verteilung
β	Formparameter der Weibull-Verteilung (Ausfallsteilheit)
θ	Skalenparameter der Weibull-Verteilung
$\hat{}$	Kennzeichnung eines Schätzwertes
$1-\alpha$	Vertrauensniveau
n	Stichprobenumfang
r, r'	Anzahl der Stichprobeneinheiten, von denen Ermittlungsergebnisse gewonnen wurden
r/n	Zensorisierungsgrad
$x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, \ldots, x_{(r)}$	geordnete Stichprobe mit $r \le n$ und $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(r)}$
f	Anzahl der Freiheitsgrade

Indizes

un	untere Vertrauensgrenze
ob	obere Vertrauensgrenze
e	einseitiger Vertrauensbereich
z	hier: zweiseitiger Vertrauensbereich

Für die beiden Parameter θ und β werden in verschiedenen Anwendungsgebieten unterschiedliche Formelzeichen benutzt. Beispiele dafür finden sich in der nachfolgenden Tabelle 1.

Tabelle 1: Formelzeichen für Parameter der Weibullverteilung aus verschiedenen Anwendungsbereichen

Fachgebiet	Skalenparameter	Form parameter
diese Norm	θ	β
DIN 55350-22	b	k
Lebensdaueruntersuchungen	T	b
Materialprüfungen	σ_0	m

Die Verteilungsfunktion der Weibull-Verteilung lautet:

$$G(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \le x_0 \\ 1 - \exp\left[-\left[\dfrac{x - x_0}{\theta}\right]^\beta\right] \text{ für } x \ge x_0 \end{cases} \qquad (1)$$

Mit $x_0 = 0$ erhält man die in dieser Norm allein behandelte zweiparametrige Weibull-Verteilung mit der Verteilungsfunktion

$$G(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \le 0 \\ 1 - \exp\left[-(x/\theta)^\beta\right] \text{ für } x \ge 0 \end{cases} \qquad (2)$$

5 Punktschätzungen für den Formparameter β und den Skalenparameter θ der Verteilung

5.1 Zensorisierte Stichprobe: $r < n$

$$\hat{\beta} = \frac{n\,K_{r;\,n}}{r \ln x_{(r)} - \sum\limits_{i=1}^{r} \ln x_{(i)}} \qquad (3)$$

$$\hat{\theta} = \exp\left(\ln x_{(r)} - \frac{c_{r;\,n}}{\hat{\beta}}\right) \qquad (4)$$

Werte für $K_{r;\,n}$ und $c_{r;\,n}$ sind den Tabellen 9 und 10 zu entnehmen.

5.2 Vollständige Stichprobe: $r = n$

$$\hat{\beta} = \frac{n\,K_n}{\dfrac{s}{n-s} \sum\limits_{i=s+1}^{n} \ln x_{(i)} - \sum\limits_{i=1}^{s} \ln x_{(i)}} \qquad (5)$$

$$\hat{\theta} = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln x_{(i)} + \frac{0{,}5772}{\hat{\beta}}\right) \qquad (6)$$

mit $s = \text{ent}\,(0{,}84\,n) = $ (größte ganze Zahl $\le 0{,}84\,n$).

Die Werte für K_n sind der Tabelle 11 zu entnehmen.

6 Beurteilung von Stichprobenergebnissen

6.1 Das Weibull-Netz

Das Wahrscheinlichkeitsnetz für die Weibull-Verteilung ist so konstruiert, daß die Verteilungsfunktion einer zweiparametrigen Weibull-Verteilung durch eine Gerade repräsentiert wird. Die Steigung der Geraden ist durch den Formparameter β bestimmt.

Es ist folgendermaßen aufgebaut:

Ordinateneinteilung für $G(x)$ nach der Funktion

$$\eta = \ln\left(\ln \frac{1}{1 - G(x)}\right)$$

Abszissenteilung für x nach der Funktion

$$\xi = \ln x \text{ oder } \xi = \lg x$$

Entsprechende Formblätter sind im Handel.

In der Regel soll ein Weibull-Netz verwendet werden, dessen Ordinate von $G = 10^{-3} = 0{,}1\,\%$ bis $G = 0{,}999 = 99{,}9\,\%$ reicht.

Die Anzahl der erforderlichen Dekaden des Abszissenbereichs hängt vom Formparameter β ab.

6.2 Graphische Darstellung der geschätzten Verteilungsfunktion

Die Punktschätzungen $\hat{\beta}$ des Formparameters β und $\hat{\theta}$ des Skalenparameters θ legen eine Gerade im Weibull-Netz fest; diese Gerade wird zweckmäßigerweise durch folgende Punkte festgelegt:

$$x = \hat{\theta} \qquad G(x) = 0{,}632\,1 = 63{,}21\,\%$$

$$x = \hat{\theta} \cdot 0{,}010\,05^{\,1/\hat{\beta}} \qquad G(x) = 0{,}01 = 1\,\%$$

Die Gerade wird in das Weibull-Netz eingezeichnet.

6.3 Einzeichnen der Stichprobendaten in das Weibull-Netz

6.3.1 Einzelwerte

Aus den Messungen an einer zensorisierten oder vollständigen Stichprobe liegen r bzw. n einzelne Merkmalswerte $x_{(i)}$ vor, geordnet in aufsteigender Reihenfolge.

Jedem solchen Merkmalswert $x_{(i)}$ wird ein Ordinatenwert

$$G_{n;\,i} = \frac{i - 0{,}3}{n + 0{,}4} \qquad i = 1, 2, \ldots, r \le n \qquad (7)$$

zugeordnet, wobei die Ordinatenwerte $G_{n;\,i}$ eine Näherung der Median-Ranks darstellen.

Die Werte der Funktion $G_{n;\,i}$ für die Stichprobenumfänge $n = 5$ bis $n = 46$ sind in Tabelle 2 angegeben.